

Exercício 43 (capítulo 5 do livro): Considere que o tempo gasto numa visita à feira do livro é uma variável aleatória com distribuição normal de média igual a duas horas. Suponha que apenas 2.5% dos visitantes permanecem mais de três horas.

a) Qual o desvio padrão da variável?

Solution: Seja X a variável aleatória que representa o tempo gasto numa visita à feira do livro. Do enunciado, sabemos que

$$P(X > 3) = 0.025.$$

Dadas as propriedades da normal sabemos que

$$P(X > 3) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-2}{\sigma} > \frac{3-2}{\sigma}\right) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) = 0.025.$$

onde $Z = \frac{X-2}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Usando a tabela 5 do livro sabemos que $\frac{1}{\sigma} = 1.96$, logo $\sigma = 0.5102$.

b) Sabendo que um visitante já chegou há uma hora, qual a probabilidade de se ir embora nos próximos 30 minutos?

Solution: A probabilidade requerida é

$$\begin{aligned} P(X \leq 1.5 | X > 1) &= \frac{P(1 < X \leq 1.5)}{P(X > 1)} = \frac{P(-1.96 < Z \leq -0.98)}{P(Z > -1.96)} = \frac{\Phi(1.96) - \Phi(0.98)}{\Phi(1.96)} \\ &= \frac{0.9750 - 0.8365}{0.9750} = 0.1421, \end{aligned}$$

onde $Z = \frac{X-2}{\sigma} \sim N(0, 1)$ e as probabilidades acumuladas podem ser obtidas na Tabela 4 do livro.

c) Calcule a mediana e o intervalo interquartil de X , e interprete o seu significado.

Solution: Para respondermos a esta questão temos de obter o primeiro, segundo e terceiro quartis. Se $\xi_{0.25}$ representar o primeiro quartil, $\xi_{0.5}$ a mediana e $\xi_{0.75}$ o terceiro quartil temos que

$$P(X \leq \xi_\alpha) = \alpha, \text{ onde } \alpha = 0.25, 0.5, 0.75$$

Usando a transformação habitual ($Z = \frac{X-2}{\sigma} \sim N(0, 1)$) temos que

$$P\left(\frac{X-2}{0.5102} \leq \frac{\xi_\alpha - 2}{0.5102}\right) = \alpha \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\xi_\alpha - 2}{0.5102}\right) = \alpha, \text{ onde } \alpha = 0.25, 0.5, 0.75.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\xi_{0.25} - 2}{0.5102} &= -0.67449 \Leftrightarrow \xi_{0.25} = 1.656 \\ \frac{\xi_{0.5} - 2}{0.5102} &= 0 \Leftrightarrow \xi_{0.5} = 2 \\ \frac{\xi_{0.75} - 2}{0.5102} &= 0.67449 \Leftrightarrow \xi_{0.75} = 2.344\end{aligned}$$

Portanto, o intervalo interquartil é (1.656, 2.344) e a mediana (= média no caso da normal) é 2. Isto significa que 50% das pessoas passa entre 1.656h e 2.344h na feira do livro.

- d) Calcule a probabilidade de em 20 visitantes seleccionados ao acaso haver no máximo um que permaneça mais do que 3 horas.

Solution: Seja Y a variável aleatória que representa o número de visitantes que permanecem mais de 3 horas na feira do livro num conjunto de 20 visitantes.

$$Y \sim B(20, p) \text{ onde } p = P(X > 3)$$

Se $Z = \frac{X-2}{\sigma} \sim N(0, 1)$, então

$$p = P(X > 3) = P(Z > 1.96) = 0.025.$$

Assim, a probabilidade requerida é

$$P(Y \leq 1) = \binom{20}{0} 0.025^0 \times 0.975^{20} + \binom{20}{1} 0.025^1 \times 0.975^{19} = 0.9118.$$